弾性体の支配微分方程式

弾性体の境界値問題

弾性体の力と変形に関する問題は，次の境界値問題を解くことに帰着する（ただし，テンソル標記を用いている）．

釣合い方程式（領域Ω内で）

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

境界条件：（境界Γ上で）

$$u_i = \bar{u}_i \qquad (\ \Gamma_u \text{ 上})$$

$$t_i = \bar{t}_i \qquad (\ \Gamma_t \text{ 上})$$

ただし，i は x または y または z.

釣合方程式（平衡方程式）の導出

釣合方程式は，固体に作用する力が釣り合っている場合，固体内のすべての部分で，表面力と物体力の総和が 0 となることを意味している．釣合方程式は，ガウスの公式を用いると簡単に得られる．

$$\int_\Gamma \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_\Omega \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} d\Omega = \int_\Gamma \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_\Omega \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} d\Omega$$

$$= \int_\Omega \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y \\ \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z \end{Bmatrix} d\Omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

したがって，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{aligned}$$

釣合方程式（平衡方程式）

添字記号では次のように簡潔に書ける．

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0$$

応力テンソルの対称性

応力テンソル（応力成分）は，次のように対称である．

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}$$

すなわち

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

応力テンソルの対称性により，応力テンソル９成分の中で独立なものは６個であることが分かる．

応力テンソルの対称性は，固体に働く表面力と物体力による力のモーメントの総和が０となる条件から導かれる．

応力テンソルの対称性の導出も，発散定理を用いると厳密に導くことができる．添字記号を用いるとエレガントに示すことができるので，次ページの過程を参考にされたい．

(省略)

物体に働くモーメントの釣合はベクトルの記号を用いると次のように書ける.

$$\int_\Gamma \vec{x}\times\vec{t}\,d\Gamma+\int_\Omega \vec{x}\times\vec{b}\,d\Omega=\vec{0}\quad \text{すなわち}\int_\Gamma e_{ijk}x_j t_k\,d\Gamma+\int_\Omega e_{ijk}x_j b_k\,d\Omega=0$$

左辺第 1 項を発散定理を用いて変形すると次のようになる.

$$\int_\Gamma e_{ijk}x_j t_k\,d\Gamma=\int_\Gamma e_{ijk}x_j\sigma_{mk}n_m\,d\Gamma=\int_\Omega e_{ijk}(x_j\sigma_{mk})_{,m}\,d\Omega$$

$$=\int_\Omega e_{ijk}(x_{j,m}\sigma_{mk}+x_j\sigma_{mk,m})\,d\Omega=\int_\Omega e_{ijk}(\delta_{jm}\sigma_{mk}+x_j\sigma_{mk,m})\,d\Omega$$

$$=\int_\Omega (e_{ijk}\sigma_{jk}+x_j\sigma_{mk,m})\,d\Omega$$

下の式に代入すると

$$\int_\Omega e_{ijk}\sigma_{jk}\,d\Omega+\int_\Omega e_{ijk}x_j(\sigma_{mk,m}+b_k)\,d\Omega=0$$

釣合方程式より $\sigma_{mk,m}+b_k=0$ であるから,

$$\int_\Omega e_{ijk}\sigma_{jk}\,d\Omega=0=\frac{1}{2}\int_\Omega (e_{ijk}\sigma_{jk}+e_{ijk}\sigma_{jk})\,d\Omega=\frac{1}{2}\int_\Omega (e_{ijk}\sigma_{jk}+e_{ikj}\sigma_{kj})\,d\Omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega (e_{ijk}\sigma_{jk}-e_{ijk}\sigma_{kj})\,d\Omega=\frac{1}{2}\int_\Omega e_{ijk}(\sigma_{jk}-\sigma_{kj})\,d\Omega$$

したがって,

$$\sigma_{jk}=\sigma_{kj}$$

ナビエの方程式

釣り合い方程式 $\Rightarrow$ $\sigma_{ij,i} + b_j = 0$

＋

Hookeの法則 $\Rightarrow$ $\sigma_{ij} = \dfrac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} = 0$

＋

変位–ひずみ関係式 $\Rightarrow$ $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

↓

ナビエ (Navier) の方程式 $\Rightarrow$ $\dfrac{E}{2(1-2\nu)(1+\nu)}u_{i,ij} + \dfrac{E}{2(1+\nu)}u_{j,ii} + b_j = 0$

変位３成分に関する連立の偏微分方程式

ベクトル表記では次のようになる.

$$\frac{E}{2(1-2\nu)(1+\nu)}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)}\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{b} = 0$$

弾性体の支配微分方程式のまとめ

- 釣り合い方程式（平衡方程式）と弾性境界値問題
- 応力テンソルの対称性
- ナビエの方程式